幻方方面尚未解决的问题

阿部（Gakuho Abe）

施学良　高治源译

摘要：本文收集幻方方面 **23** 个尚未解决的问题或猜想，以及与提到的这些问题有关的一些最新结果。

1.　序言

本文收集幻方方面尚未解决的 **23** 个问题或猜想，材料来源于新近的研究。我们将提出这些问题并给出最新结果，特别介绍一些新的有趣的幻方。在幻方方面获得的许多已知结果，可从下列日本刊物中找到：**Fascinating Puzzles Monthly(FPM),Meeting of Puzzles(MP),Researches in Magic Squares(RMS)**和 **Monthly Abscus(MA)**。幻方的基本概念可以从参考文献[3]第 7 章和文献[2]、[4]第 3 章中查找。对幻方的历史和在日本的当前发展情况感兴趣的读者，可查阅参考文献[1]。

广义幻方 $A=(a_{ij})$，$i\leqslant 0,j\leqslant n-1$,是由 n^2 个不同的非负整数组成的且具有每行、每列和各对角线上 n 个数之和均相等的特性的方阵。方阵的行（列）数 n 称做方阵的阶。如果使用自然数 1 至 n^2，则称做幻方。由 n^2 个不同的非负整数（或自然数 1 至 n^2）组成的方阵，如各行和各列诸数之和均相等，则称做广义不完全幻方（或不完全幻方）。幻方（a_{ij}）如果对所有 $0\leqslant i,j\leqslant n-1$,

$$a_{ij}+a_{n-1-j\ n-1-j}=n^2+1,$$

称做对称幻方。

此外，在幻方（a_{ij}）中，如果对每一个 i，

$$a_{0i}+a_{1i+1}+\cdots+a_{(n-1)i+(n-1)}$$

和

$$a_{0i}+a_{1i-1}+\cdots+a_{(n-1)I-(n-1)}$$

都相等，则称此幻方为全对角线幻方（或完美幻方）。注意下标常用模 n 来表示。如果广义幻方 $A=$（a_{ij}）的子方阵 $B=(a_{kl}),p\leqslant k\leqslant p+m,q\leqslant l\leqslant q+m\ (0\leqslant p,q\leqslant p+m,q+m\leqslant n-1)$，是其本身的广义幻方，则我们说 A 包含广义幻方 B。特别地，如果幻方 $A=$（a_{ij}）包含广义方阵

$$B=(a_{kl}),1\leqslant k,l\leqslant n-2$$

则幻方 A 是镶框幻方（图 1）。对于 n 阶幻方，我们对其连线图定义如下：在包含 n^2 个单元的方阵上，当且仅当

$$a_{ij}+a_{kl}=n^2+1$$

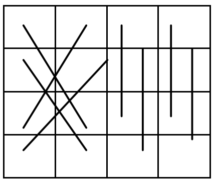
用线条连接 c_{ij} 和 c_{kl} 形成的图称为连线图（见图 1）。令 σ 为 $CF(A)$ 的直角旋转图，或中心水平线、是中心垂直线或两条对角线之一的反射图。如果 σ $CF(A)=CF(A)$，则 σ 是 $CF(A)$的自同构。如果直角旋转图是 $CF(A)$的自同构，则 $CF(A)$属旋转型，。如果四个反射图都是 $CF(A)$的自同构，则 $CF(A)$属反射型。当然，也可能存在 $CF(A)$同属旋转型和反射型的情形。

2	11	13	27
1	33	17	1
0	7	21	23
	0	1	2

广义幻方

8	10	11	5
13	3	2	16
1	15	14	4
12	6	7	9

4 阶幻方 B



B 的连线图

10	16	3	5
2	8	13	11
7	1	12	14
15	9	6	4

对称幻方

现在我们来说明一种规则幻方、，它仅限于奇阶幻方。令 $n\geqslant3$ 是奇数，a_1、a_2、b_1、 b_2是与互质的整数。使

$\lambda=a_1b_2-a_2b_1$

10	45	44	7	11	12	46
9	23	37	14	34	17	41
8	28	15	24	27	31	42
49	20	36	25	18	26	1
48	19	21	30	33	22	2
47	35	16	32	13	29	3
4	5	6	43	39	38	40

镶框幻方

假设 λ 亦与 n 互质。对于每一个整数 Z，$(1\leqslant Z\leqslant n^2)$

我们首先表示 Z 为

$$Z-1=nr+s,\ (0\leqslant r,s\leqslant n-1).$$

我们规定方阵 $X=(x_{ij}),0\leqslant ij\leqslant n-1$，而令

$$x_{ij}=Z,$$

$$i\equiv a_1r+b_1s+c_1\ (\mathrm{mod}\,n)$$

和

$$j\equiv a_2r+b_2s+c_2\ (\mathrm{mod})$$

当且仅当下列四个条件成立时，则 X 是 n 阶幻方：

$b_1c_2-b_2c_1\equiv\lambda\,(e_1-1)/2\ (\mathrm{mod}\ e_1)$,

$a_2c_1-a_1c_2\equiv\lambda\,(e_2-1)/2\ (\mathrm{mod}\ e_2)$,

$b_1c_2-b_2c_1+b_1\equiv\lambda\,(e_1-1)/2\ (\mathrm{mod}\ f_1)$,

$a_2c_1-a_1c_2+a_1\equiv\lambda\,(f_2-1)/2\ (\mathrm{mod}\ f_2)$,

此处

$e_1=(b_2-b_1,n)$(即最大公约数),

$e_2=(a_2-a_1,n)$

$f_1 = (b_2 + b_1, n)$

$f2 = (a_2 + a_1, n)$

如果幻方 X 能用此法得到，我们说它是规则的。否则它是不规则的。

如果 n 阶方阵的各行各列包含所有按某种顺序排列的数 0，1，…，n-1,此方阵称为拉丁方阵。对于 n 阶幻方 $A=(a_{ij})$,由 $a_{ij}-1=r_{ij}n+s_i$, $0 \leqslant r_{ij}, s_i, \leqslant n-1$

我们规定两个 n 阶方阵 $R(A)=(r_{ij})$和 $S(A)=(s_{ij})$。显然 $A=nR(A)+s(a)+j$，此处 J 是每个单元均为 1 的 n×n 方阵。如 $R(A)$和 $S(A)$均为拉丁方阵，则 A 称做基本方阵。不然，A 称做非基方阵（见图 2）。易知，规则幻方是基本幻方，尤其是非基幻方是不规则的。如果 $R(A)$和 $S(A)$都具有每行和每列上 n 个数之和都相等的性质，则 A 称为有理的。如果 $R(A)$和 $S(A)$都不具有这一性质，则称 A 为无理的（见图 9）。注意和 $R(B)$和 $S(B)$之一恰恰具有这一性质的幻方 B 是不存在的。显然，基本幻方是有理的。图 2 所示幻方 X 是非基幻方，因为 $S(X)$是拉丁幻方，而 $R(X)$则不是。

2. 问题和猜想

确实存在 880 个 4 阶幻方。对于 16 个正整数的集合 *I*，我们用 $f(I)$表示所有包含 I 中整数的 4 阶广义幻方的个数。

问题 2.1. 确定 $f(I)$的最大值。注意,如果 I={1,…,8,10…,17},则 $f(I)=1080$(G.Abe)。

确实存在 12 个 4 阶幻方的连线图。对于具有常数和的 4 阶广义幻方 $X=(x_{ij})$，我们规定连线图 $CF(X)=(c_{ij})$，(c_{ij})由当且仅当

$x_{ij}+x_{kl}=m/2$ 时用线条连接 c_{ij} 和 c_{kl} 而证。

Tomiya Yokose 找到另外 **12** 个 **4** 阶广义幻方的连线图，**G.Abe** 又找到 **10** 个。从而，我们有 **34** 个 **4** 阶广义幻方的连线图。这些连线图和相应的广义幻方可以从 **PRM No.153(1986)**的论文中找到。

问题 **2.2** 找出所有的 **4** 阶广义幻方的连线图。

1941 年，**J.C.Barnett** 指出：确实存在 **174240** 个 5 阶镶框幻方，均属反射型。同年，**L.Candy** 和 **H.Safford** 证明，5 阶对称幻方的个数为 **48544**。之后，**Shutaro Teramara** 宣布：存在 **591008** 个 5 阶幻方，其连线图属反射型，有 **21** 个。但是，都存在微细误差：**Hiro Yabe** 用计算机发现，连线图为反射型的 **5** 阶幻方的个数为 **591008**，假设恰恰存在 **21** 个此类幻方的连线图的话。

问题 **2.3** 确定连线图属反射型的 **5** 阶幻方的个数。

问题 **2.4** 确定连线图属旋转型的 **5** 阶幻方的个数。

大家知道，在假设 **4** 阶广义幻方的连线图恰好有 **34** 个的情况下，**6** 阶镶框幻方个数确实是 **736347893760**（**MP No.156(1987)**）。

问题 **2.5** 所有 **6** 阶镶框幻方的个数确实是 **736347893760** 吗？

大家知道，至少存在 6×10^8 个 **7** 阶不规则的全对角线幻方。其连线图 **H.Candy** 找到了两个**(1940~1941)**，**H.Benson** 又找到了一个**(1982)**，**G.Abe** 找到了 **62** 个**(1981~1985)**，**Yosiro Marunaga** 于 **1985** 年又找到了 **5** 个。这些连线图及其分类可从 **RMS No.14** 的论文中得到。

问题 **2.6** 确定 **7** 阶不规则的（或非基的）全对角线幻方的个数。

问题 2.7　确定 7 阶不规则的（或非基的）对称全对角线幻方的个数。

如果一个幻方能被分割成若干个同阶广义幻方，我们说此幻方是可分割的。设 $A=(a_{ij}),0\leqslant i,j\leqslant n-1$，是 n 阶偶阶幻方。如果每一个 4 阶子方阵

$$(a_{kl}),\quad 2s\leqslant k\leqslant 2s+3,\quad 2t\leqslant l\leqslant 2t+3$$

$0\leqslant s,t\leqslant n/2-2$ 都是广义不完全幻方，那么我们说 A 具有 4 阶广义不完全幻方的覆叠。如果每一个这种子方阵都是广义幻方，那么我们说 A 具有 4 阶广义幻方的覆叠。如果和

$$a_{ij}+a_{i+1j}+a_{ij+1}+a_{i+1j+1}$$

对每一个 $0\leqslant i,j\leqslant n-2$ 均相等，则幻方 $A=(a_{ij})$ 称做 2×2 等值单元化。 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，$0\leqslant i,j\leqslant n-1$，如果下列 4 行的 8 数之和，对于每一个 i,j 均相等，称做具有 Franklin 性质。

$$a_{ij}+a_{i+1j+1}+a_{i+2j+2}+a_{i+31j+3}+a_{i+3j+4}+a_{i+2j+5}+a_{i+1j+6}+a_{ij+7}$$

$$a_{ij}+a_{i-1j+1}+a_{i-2j+2}+a_{i-31j+3}+a_{i-3j+4}+a_{i-2j+5}+a_{i-1j+6}+a_{ij+7}$$

$$a_{ij}+a_{i+1j+1}+a_{i+2j+2}+a_{i+31j+3}+a_{i+4j+3}+a_{i+5j+2}+a_{i+6j+1}+a_{i+7j}$$

$$a_{ij}+a_{i+1j-1}+a_{i+2j-2}+a_{i+31j-3}+a_{i+4j-3}+a_{i+5j-2}+a_{i+6j-1}+a_{i+7j}$$

此处我们考虑各行诸数之和，唯一的条件是其诸数 a_{lm} 的所有下标 lm 满足 $0\leqslant l,m\leqslant n-1$。例如，图 3

33	**24**	**47**	**26**	**35**	**22**	**45**	**28**
16	**57**	**2**	**55**	**14**	**59**	**4**	**53**
18	**39**	**32**	**41**	**20**	**37**	**30**	**43**
63	**10**	**49**	**8**	**61**	**12**	**51**	**6**
34	**23**	**48**	**25**	**36**	**21**	**46**	**27**
15	**58**	**1**	**56**	**13**	**60**	**3**	**54**
17	**40**	**31**	**42**	**19**	**38**	**29**	**44**
64	**9**	**50**	**7**	**62**	**11**	**52**	**5**

图 3

（Yoshizane Tanaka, 1683）所示幻方 X 被分割为 4 个 4 阶广义幻方，而且是 **2×2** 等值单元化的。此外，它具有 **4** 阶广义不完全幻方的覆叠，也具有 **Franklin** 性质。

问题 2.8 确定 **2×2** 等值单元化的 **8** 阶对称全对角线幻方的个数。

问题 2.9 确定具有 **4** 阶广义幻方覆叠的 **8** 阶幻方的个数。

问题 2.10 是否存在 **9** 阶无理的全对角线幻方？注意 **9** 阶非基的全对角线幻方的存在的，示于图 **4**。

41	30	52	61	31	1	21	81	51
11	9	24	77	66	44	16	67	55
71	40	29	47	63	14	5	20	80
59	10	8	25	76	65	39	18	69
75	54	42	33	46	62	34	4	19
70	58	28	3	27	78	50	38	17
23	74	53	43	13	64	57	36	6
12	72	60	32	2	26	79	49	37
7	22	73	48	45	15	68	56	35

图 4

问题 2.11 是否存在具有 **Franklin** 性质的 **10** 阶 **2×2** 等值单元化不完全幻方？

图 **5** 所示一个 **13** 阶幻方 $A=(a_{ij})$，$0\leqslant i, j\leqslant 12$，包含下列 3、4、…11 阶广义幻方。3、4、5、6 阶广义幻方已在图 5 中表出。

(a_{lm}) $7\leqslant l\leqslant 9$, $3\leqslant m\leqslant 5$, (a_{lm}) $0\leqslant l\leqslant 3$, $4\leqslant m\leqslant 7$,

(a_{lm}) $2\leqslant l\leqslant 6$, $6\leqslant m\leqslant 10$, (a_{lm}) $7\leqslant l\leqslant 12$, $0\leqslant m\leqslant 5$,

(a_{lm}) $0\leqslant l\leqslant 6$, $6\leqslant m\leqslant 12$, (a_{lm}) $2\leqslant l\leqslant 9$, $3\leqslant m\leqslant 10$,

(a_{lm}) $4\leqslant l\leqslant 12$, $0\leqslant m\leqslant 8$, (a_{lm}) $0\leqslant l\leqslant 9$, $3\leqslant m\leqslant 12$,

(a_{lm}) $2\leqslant l\leqslant 12$, $0\leqslant m\leqslant 10$,

52	100	103	5	142	108	74	19	162	157	13	155	15

98	104	53	144	107	4	163	75	17	82	88	77	93
105	51	99	106	6	143	18	161	76	16	154	23	147
165	26	64	11	160	84	113	1	141	73	97	156	14
28	63	164	158	85	12	3	140	112	48	122	50	120
62	166	27	86	10	159	139	114	2	134	36	49	121
96	7	152	57	167	31	118	72	65	133	37	123	47
151	95	9	169	30	56	70	66	119	61	109	32	138
8	153	94	29	58	168	67	117	71	116	54	22	148
110	111	34	79	132	44	39	125	46	80	135	101	69
60	59	136	91	38	126	131	45	124	35	90	137	33
81	24	150	83	129	43	40	128	115	145	21	78	68
89	146	20	87	41	127	130	42	55	25	149	102	92

图 5

猜想 2.12　对于每一个 n≥5 的奇数和每一个 *3≤k≤n-2*,存在包含 k 阶广义幻方的 n 阶幻方。注意这一猜想对于 n=5、7、9、11、13、15、17(G. Abe(n=7、13、15、17)和 Toshio Kobayashi(n=9)(1988～1990)）是正确的。

猜想 2.13　对于每一个 n≥6 的偶数和每一个 3≤k≤n-2,存在包含 k 阶广义幻方的 n 阶幻。这一猜想对于 n=6、8、10（G. Abe（n=6）和 Kobayashi(n=8,10)）（1988～ 1990)）是正确的。

假设 n 阶幻方 A 包含不同阶的广义幻方 B_1=A，B_2，…，B_l。令 n_i 表 B_i 的阶，S_i 表 B_i 的常数。我们用 S_i/n_i 表示 B_i 的单元和。例如，示于图 6（Toshio Kobayashi）的幻方 A 包含 3 个广义幻方（B_1=A）,4 阶的 B_2 和 3 阶的 B_3)，其单元和分别为 111/6=18.5，71/4=17.5，51/3=17。寻找一个包含许多个具有不同单元和的广义幻方的幻方，似乎很难。

3	6	34	28	35	5
20	31	2	18	15	25
19	12	26	14	10	30
29	22	9	11	13	27
8	36	16	33	17	1
32	4	24	7	21	23

图 6

问题 2.14　确定包含 17 阶幻方中的阶和单元均不相同的广义幻方个数的最在值。注意，示于图 7 的 17 阶幻方包含 10 个广义幻方包含 10 个广义幻方，其阶为 k∈{3、4、5、6、7、9、11、13、15、17}，其单元和各不相同。

264	25	256	33	266	23	20	270	210	81	191	100	138	153	148	141	146
29	260	27	262	31	258	22	268	94	197	83	208	134	157	143	145	147
28	261	30	259	26	263	215	75	85	206	96	195	130	161	144	149	142
257	32	265	24	255	34	236	54	193	98	212	79	196	163	189	87	91
231	58	223	66	233	56	271	19	132	159	198	93	128	92	102	204	200
62	227	60	229	64	225	216	74	113	178	126	180	89	174	164	108	176
61	228	63	226	59	230	52	238	185	106	111	162	202	117	127	183	115
224	65	254	35	219	70	249	41	109	104	181	151	168	121	136	172	166
38	251	14	275	244	45	53	237	187	179	110	140	123	170	155	119	125
274	15	232	57	222	67	51	77	76	272	217	246	55	43	42	250	269
253	36	273	16	205	84	213	245	214	18	73	44	235	247	248	40	21
13	276	37	252	17	243	239	186	69	78	137	158	12	285	280	1	182
194	95	241	48	46	289	50	103	220	211	152	131	277	4	9	288	107
201	88	72	160	154	124	47	175	192	190	86	177	2	281	284	11	221
207	82	129	234	135	165	242	114	97	99	203	112	287	8	5	278	68
39	199	49	218	184	122	169	150	101	156	118	173	10	283	282	3	209
90	267	240	71	105	167	120	139	188	133	171	116	279	6	7	286	80

问题 2.16　是否存在连线图属旋转型的偶阶全对角线幻方？

问题 2.17　是否存在连线图属旋转型的奇阶全对角线幻方？

问题 2.18　是否存在一种构造所有各阶对称的非基的全对角线幻方的方法？

问题2.19　是否存在n≤*11*的奇阶无理的全对称线幻方？注意，13阶无理的全对角线幻方是存在的，示于图9

52	102	152	33	83	133	14	77	127	8	58	108	158
79	**142**	**23**	**73**	**123**	**4**	**54**	**117**	**167**	**48**	**98**	**148**	**29**
119	13	63	113	163	44	94	144	38	88	138	19	69
159	40	103	153	34	84	134	15	78	128	9	59	109
30	80	143	24	74	124	5	55	105	168	49	99	149
70	120	1	64	114	164	45	95	145	39	89	139	20
110	160	41	104	154	35	85	135	16	66	129	10	60
150	31	81	131	25	75	125	6	56	106	169	50	100
21	71	121	2	65	115	165	46	96	146	27	90	140
61	111	161	42	92	155	36	86	136	17	67	130	11
101	151	32	82	132	26	76	126	7	57	107	157	51
141	22	72	122	3	53	116	166	47	97	147	28	91
12	62	112	162	43	93	156	37	87	137	18	68	118

问题 2.20　不存在单偶阶全对角线幻方。确定具有单偶阶幻方常数的破对角线线数的最大值。

62	26	46	89	103	8	106	30	136	70	126	144	159
128	32	135	54	118	146	166	59	52	24	90	99	2
108	155	164	74	43	19	83	100	1	107	36	137	78
14	101	81	7	117	37	142	73	119	147	162	57	48
28	134	71	122	152	157	55	49	20	91	102	12	112
156	167	64	47	15	82	97	5	113	27	133	75	124
96	9	105	29	140	72	130	154	168	60	41	17	84
42	23	85	104	11	116	34	132	69	123	148	165	53
77	125	145	160	58	44	22	79	94	10	111	39	141
6	109	35	131	68	127	150	169	63	51	21	80	95
163	65	50	25	86	93	4	110	31	139	66	120	153
138	67	121	149	161	61	40	16	88	98	13	115	38
87	92	3	114	33	143	76	129	151	158	56	45	18

问题 2.21　有没有可能利用连续的素数构造一个任何阶的广义幻方？

如果方阵（a_{ij}^2）是一个广义幻方，则幻方 $A=(a_{ij})$称做双重幻方。

问题 2.22　是否存在这样一个双重幻方(a_{ij})，其(a_{ij})和（a_{ij}^2）都是全对角线的？

3	20	16	12	1	141	139	137	137	127	123	9
124	25	38	34	23	105	117	115	109	119	31	21
128	106	43	52	41	101	99	97	91	49	39	17
132	110	92	57	55	87	85	83	63	53	35	13
2	24	42	56	71	73	72	70	89	103	121	143
10	32	50	64	75	69	70	67	81	95	113	135
140	118	100	86	77	78	65	74	59	45	27	5
138	116	98	84	66	68	79	80	61	47	29	7
19	33	51	82	90	58	60	62	88	94	112	126
15	37	96	93	104	44	46	48	54	102	108	130
11	114	107	111	122	40	28	30	36	18	120	142
136	125	129	133	144	4	6	8	14	26	22	134

一个 n 阶反幻方(a_{ij})是一个 n 阶方阵，它具有这样的性质：每行每列和各条对角线上 n 个数的一组和由连续数组成。例如，示于图 10 的方阵就是一个 12 阶反幻方，因为每行每列和各条对角线上 12 个数的一组和由{857，859，…882}组成，两条对角线的和是 857 和 870。

问题 2.23　寻找一种构造所有各阶反幻方的方法。

施学良　高治源译

1996 年 10 月 12